

§19 Rechenregeln für die Ableitung ⁻³⁰⁰⁻ - Anwendungen

Konvention: alle $\mathbb{R}$ -V.R. $X, Y, \dots$
haben $\dim < \infty$ und sind irgendwie
mit einer Norm versehen.

Satz 19.1 a): Seien $U \subset X$ offen, $a \in U$,

$f, g: U \rightarrow Y$ diff'bar in a . Dann ist

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha f + \beta g: U \rightarrow Y$$

diff'bar in a mit

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(rechts: Addition und Multiplikation mit
Skalaren im V.R. $L(X, Y)$)

Beweis: Δ -Ungl. !



(komponentenweise Diff'barkeit)

Satz 19.1b: Seien $U \subset X$ offen, $a \in U$,
 $f: U \rightarrow Y$, $g: U \rightarrow Z$ diff'bar in a .

Dann ist

(Wahl einer
Norm auf $Y \times Z$?)

$$(f, g): U \rightarrow Y \times Z$$

diff'bar in a mit

$$(f, g)'(a)(v) = (f'(a)(v), g'(a)(v))$$

für alle $v \in X$. Umgekehrt folgt
aus Diff'barkeit von (f, g) in a
die Existenz von $f'(a)$ und $g'(a)$.

Beweis: selbst versuchen



Satz 19.1 c) : Seien $f, g: X \supset U$ (offen)

→ $\mathbb{R}$ diff'bar in $a \in U$. Dann ist
auch $f \cdot g$: $U \rightarrow \mathbb{R}$ in a diff'bar mit

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

(Produktregel)

Basis (vgl. Analysis I !): Für $v \in X$,
 $|v|$ klein genug (, d.h. $a+v \in U$), gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|v|} \left| f(a+v)g(a+v) - f(a)g(a) - g(a)Df(a)(v) - \right. \\ \left. f(a)Dg(a)(v) \right| &= \\ \frac{1}{|v|} \left| g(a+v) \left(f(a+v) - f(a) - Df(a)(v) \right) \right. \\ \left. + g(a+v)f(a) + g(a+v)Df(a)(v) \right| \end{aligned}$$

$$-f(a)g(a) - g(a)Df(a)(v) \\ - f(a)Dg(a)(v) \mid =$$

$$\frac{1}{|v|} \mid g(a+v) \left(f(a+v) - f(a) - Df(a)(v) \right) \\ + f(a) \left(g(a+v) - g(a) - Dg(a)(v) \right) + \\ \left(g(a+v) - g(a) \right) Df(a)(v) \mid \leq$$

$$\mid g(a+v) \mid \frac{1}{|v|} \mid f(a+v) - f(a) - Df(a)(v) \mid + \\ \mid f(a) \mid \frac{1}{|v|} \mid g(a+v) - g(a) - Dg(a)(v) \mid + \\ \mid g(a+v) - g(a) \mid \frac{1}{|v|} \mid Df(a)(v) \mid,$$

und alle 3 Terme rechts gehen gegen 0

bei $v \rightarrow 0$.



Bem: 1.) $U \subset \mathbb{R}^n \implies$ Produktregel für ∇ : -304-

$$\nabla(fg)(a) = g(a) \nabla f(a) + f(a) \nabla g(a)$$

2.) es gibt viele andere „Produktregeln“:

a) Seien etwa

$$f, g: \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^M$$

diff'bar in $a \in U$. Dann kann ^{man} das

Skalarprodukt $f \cdot g$ bilden und

nachrechnen (benutze 1.)

$$\nabla(f \cdot g)(a) = \sum_{i=1}^M g^i(a) \nabla f^i(a) + f^i(a) \nabla g^i(a)$$

b)

Sind

$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}, \\ \overline{\varphi}: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \underline{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

jeweils in $a \in U$ diff'bar, so gilt:

$$\operatorname{div}(\varphi \overline{\varphi}) = \nabla \varphi \cdot \overline{\varphi} + \varphi \operatorname{div} \overline{\varphi}$$

Satz 19.1 d)

: (Kettenregel) !

Sei $\varphi: X \supset U(\underline{\text{offen}}) \rightarrow Y$

diff'bar in $a \in U$ und $g: Y \supset V(\underline{\text{offen}})$

$\rightarrow Z$ diff'bar in $b := \varphi(a)$.

Sei $\varphi(U) \subset V$. Dann ist $g \circ \varphi$

in $a \in U$ diff'bar mit

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Beweis: Es gilt (Restgliedformel)

$$f(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + |x-a|r(x)$$

$$g(y) = g(b) + Dg(b)(y-b) + |y-b|R(y)$$

mit r stetig in a , $r(a) = 0$, R stetig in b , $R(b) = 0$. Also:

$$g(f(x)) = g(b) + Dg(b)(\underline{f(x) - b}) + |f(x) - b|R(f(x)) =$$

$$g(b) + Dg(b)[\underline{Df(a)(x-a) + |x-a|r(x)}]$$

$$+ |f(x) - b| R(f(x)) =$$

-307-

$$g(f(a)) + (Dg(f(a)) \circ Df(a))(x-a)$$

$$+ |x-a| Dg(f(a))(r(x)) +$$

$$|f(x) - f(a)| R(f(x))$$

||

$$|x-a| Dg(f(a))(r(x)) +$$

$$|Df(a)(x-a) + |x-a| r(x)| R(f(x)) =$$

$$|x-a| \left\{ Dg(f(a))(r(x)) + \left| Df(a) \left(\frac{x-a}{|x-a|} \right) \right| \right.$$

$$\left. + r(x) \cdot R(f(x)) \right\}$$

$$=: |x-a| \rho(x)$$

Bedingt durch den Anteil

$$D\varphi(a) \left(\frac{x-a}{|x-a|} \right)$$

ist ρ zunächst nur in $x \neq a$ definiert

gemäß

$$\left| D\varphi(a) \left(\frac{x-a}{|x-a|} \right) \right| \leq \|D\varphi(a)\|$$

Kann man ρ aber stetig in a fortsetzen
~~nämlich~~ mit Wert 0. Daraus folgen alle

Behauptungen. □

Korollar : (Kettenregel im Euklidischen Fall)

Seien $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^k$, $Z = \mathbb{R}^l$.

Dann ist die Jacobi-Matrix
 von $g \circ \varphi$ in a gegeben durch

$$J(g \circ f)(a) = (Jg)(f(a)) \circ Jf(a) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial y^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^l}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial g^l}{\partial y^k} \end{pmatrix} \xrightarrow{(f(a))} \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{pmatrix} (a)$$

Matrizenprodukt

Also:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (g \circ f)^i(a) = \sum_{\beta=1}^k \frac{\partial g^i}{\partial y_\beta}(f(a)) \frac{\partial f^\beta}{\partial x_\alpha}(a)$$

steht in $J(g \circ f)(a)$

in Zeile i und

Spalte α

$$\alpha = 1, \dots, n,$$

$$i = 1, \dots, l$$

Beweis: folgt aus der Darstellung von

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

durch Matrizen. $\square$

Korollar : Für Richtungsableitungen ^{allgemein} gilt

$$\partial_v (g \circ f)(a) = Dg(f(a)) (\partial_v f(a)).$$

Beweis: $\partial_v (g \circ f)(a) = D(g \circ f)(a)(v) =$

$$Dg(f(a)) \left(\underbrace{Df(a)(v)}_{= \partial_v f(a)} \right)$$

oder :

$$\partial_v (g \circ f)(a) = \left(\partial_{\partial_v f(a)} g \right) (f(a))$$

$\square$

Beispiele (Kettenregel):

1.) ebene Polarkoordinaten:

$$\Phi: \underbrace{\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)}_{\text{offen!}} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\Phi(r, \vartheta) := r (\cos \vartheta, \sin \vartheta) = r e^{i\vartheta},$$

$$\text{Bild}(\Phi) = \mathbb{R}^2 - (\text{positive } x\text{-Achse}),$$

$$J\Phi(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\det J\Phi(r, \vartheta) = r}$$

unabhängig von ϑ !

Sie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar -312-

$\Rightarrow f \circ \Phi$ diff'bar und z.B.

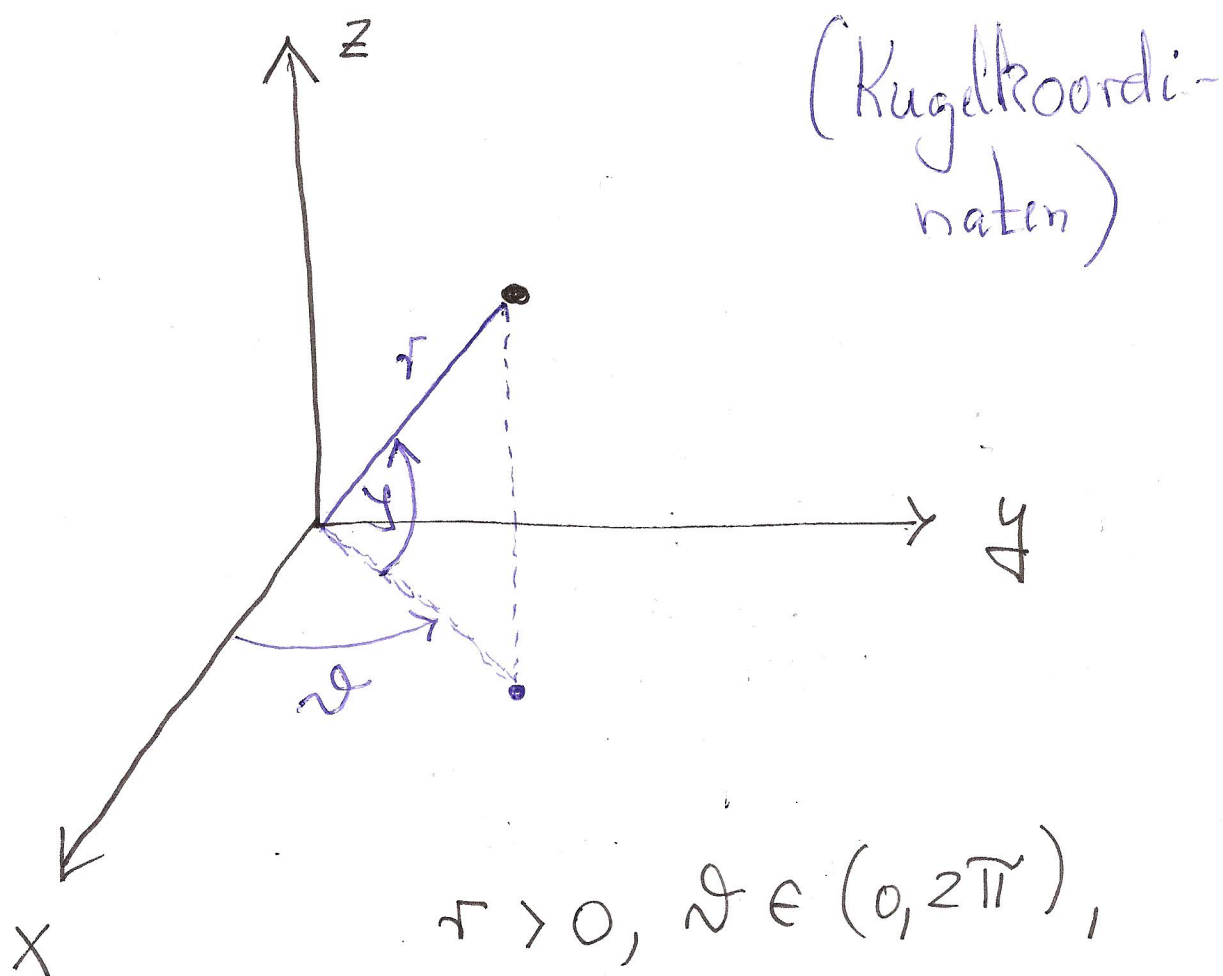
$$\frac{\partial}{\partial r} (f \circ \Phi)(r, \vartheta) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \frac{\partial \Phi^1}{\partial r}(r, \vartheta) +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \frac{\partial \Phi^2}{\partial r}(r, \vartheta) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\dots) \cos \vartheta + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\dots) \sin \vartheta$$

"
Übung: berechne $\frac{\partial}{\partial \vartheta} (f \circ \Phi)$!

2.) Polarkoordinaten im Raum :

$$r > 0, \vartheta \in (0, 2\pi),$$

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) :=$$

$$r \left(\underline{\cos \vartheta} \cos \varphi, \underline{\sin \vartheta} \cos \varphi, \sin \varphi \right)$$

$$\vartheta = \underline{\text{ebener Drehwinkel}}$$

$$\varphi = \text{Winkel mit der } z\text{-Achse}$$

$$J\Phi(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det J\Phi(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \cos \varphi} ;$$

sei $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bar $\implies$

$\varphi \circ \Phi$ diff'bar mit z.B.

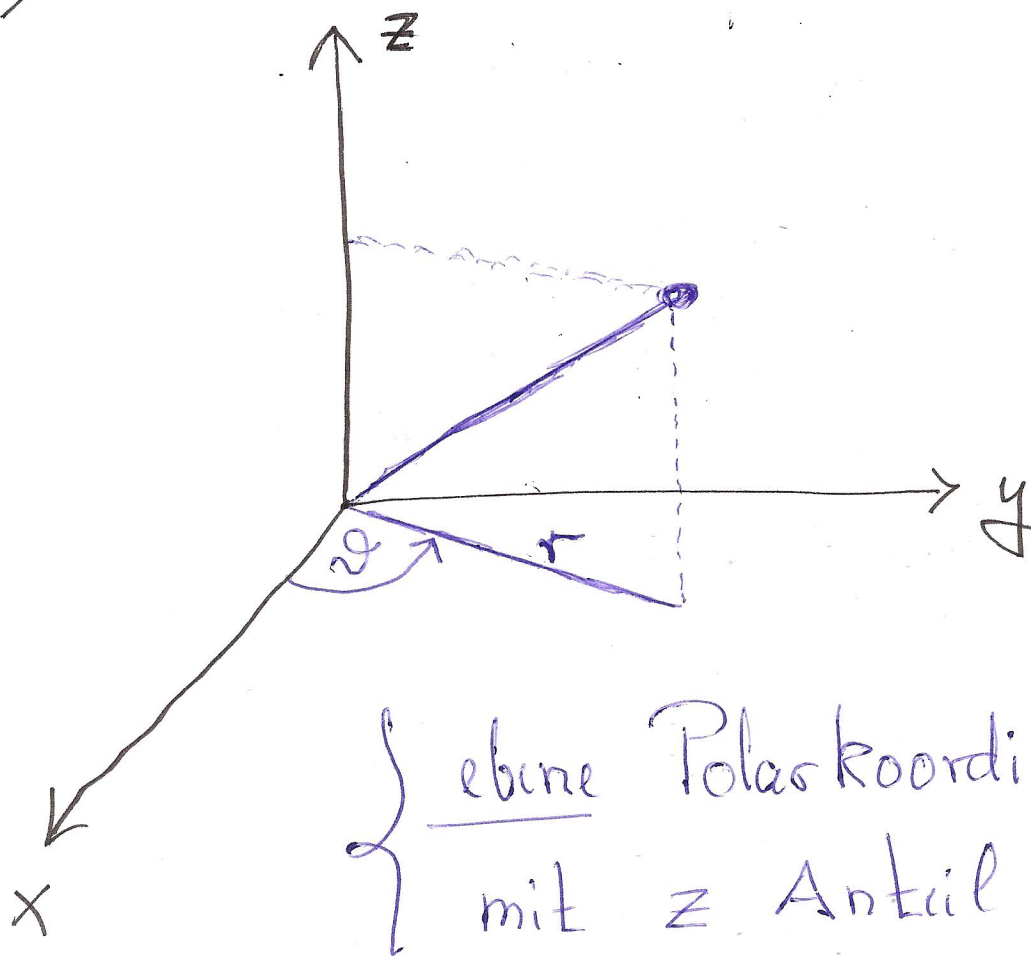
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi \circ \Phi) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\Phi) \frac{\partial \Phi^1}{\partial r} + \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\Phi) \frac{\partial \Phi^2}{\partial r} &+ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\Phi) \frac{\partial \Phi^3}{\partial r} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi) \cos \vartheta \cos \gamma +$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\Phi) \sin \vartheta \cos \gamma + \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi) \sin \gamma$$

Übung: berechne $\frac{\partial}{\partial \vartheta} (f \circ \Phi), \frac{\partial}{\partial \gamma} (f \circ \Phi)!$

3.) Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$:



$$\Phi: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(r, \vartheta, z) := (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z),$$

$$J\Phi(r, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{\det J\Phi(r, \vartheta, z) = r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (f \circ \Phi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi) \cos \vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi) \sin \vartheta$$

für diff'bare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.